

1. Ορισμός του προβλήματος 3-3SAT:

Είσοδος: Μία λογική έκφραση σε CNF στην οποία:

α) Κάθε clause έχει το πολύ 3 literals,

β) Κάθε μεταβλητή εμφανίζεται το πολύ 3 φορές.

Ερώτηση: Είναι η λογική έκφραση ικανοποιήσιμη;

Δείξτε ότι το 3-3SAT είναι NP-complete.

(Υπόδειξη: Με αναγωγή του 3SAT. Αν μια μεταβλητή x εμφανίζεται περισσότερες από τρεις φορές, αντικαταστήστε κάθε εμφάνισή της με μία νέα μεταβλητή. Πώς θα εξασφαλίσετε ότι όλες οι νέες μεταβλητές που αντικατέστησαν την x , έχουν την ίδια αληθοτιμή;)

2. Μια Boolean πρόταση λέμε πως είναι *Disjunctive Normal Form* (DNF) αν είναι διάζευξη (OR) συζεύξεων (AND). Για παράδειγμα η παρακάτω πρόταση είναι σε DNF.

$$(x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge x_4) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_4)$$

(α) Δείξε πως το SAT-DNF ανήκει στο P.

(β) Μια Boolean πρόταση ονομάζεται ταυτολογία (tautology) αν κάθε ανάθεση αληθοτιμών την ικανοποιεί.

Δείξτε πως το πρόβλημα DNF-TAUT={ DNF formula F | F is a tautology } είναι coNP-πλήρες.

2. (α) Δώστε τις σχέσεις εγκλεισμού για τις παρακάτω κλάσεις πολυπλοκότητας: L, P, NL, NP, coNP, NP∩coNP, PSPACE, NPSPACE, EXP.

(β) Για καθένα από τα παρακάτω προβλήματα δώστε σε ποια κλάση από τις παραπάνω ανήκει (και δικαιολογήστε).

1. Input: Graph G , number k

Question: Does the maximum clique of G have at most k nodes?

2. Input: Graph G

Question: Does G contain a node cover with 7 nodes ?

3. Input: Number N in binary

Question: Is N the product of two primes?

4. Input: Three numbers a, b, c in binary

Question: Is $a = b+c$?

5. Input: Boolean formula ψ , number k in binary.

Question: Does ψ have at least k satisfying truth assignments?

Note: It is not in NP because there can be exponentially many satisfying truth assignments and k is given in binary.

6. Input: Directed graph G

Question: Is G strongly connected, i.e. can every node of G reach every other node?

Για τα παρακάτω ερωτήματα δώστε σωστό ή λάθος (ή ανοικτό), και σύντομο γιατί.

1. Έστω δύο γλώσσες A, B που ανήκουν στο NP, τότε και η διαφορά τους

$A - B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \notin B\}$ ανήκει στο NP.

2. Έστω δύο γλώσσες A, B που ανήκουν στο $\text{NSPACE}(n)$, τότε και η διαφορά τους $A-B$ ανήκει στο $\text{NSPACE}(n)$.

3. $\text{TIME}(2^n) = \text{TIME}(2^{2n})$

4. $P = \text{SPACE}(n)$