Το SAT είναι NP-hard

Για κάθε αναιτιοκρατική μηχανή Turing πολυωνυμικού χρόνου M και κάθε είσοδο w, κατασκευάζουμε μια λογική έκφραση $\Phi_{M,w}$ πολυωνυμικού μήκους έτσι ώστε να **υπάρχει υπολογισμός της M που αποδέχεται το w αν και μόνο αν υπάρχει απονομή αλήθεια που ικανοποιεί την $\Phi_{M,w}$.**
Θεωρούμε ότι

$$q_0 = \text{"}yes\text{"},\ q_1 = s$$

$$\sigma_1 = \rhd,\ \sigma_2 = \sqcup$$

$$w = \sigma_{w_1}\sigma_{w_2}\cdots\sigma_{w_n}$$

Προτασιακές μεταβλητές της $\Phi_{M,w}$

$$Q_t^i,\ 1 \le t \le p(n),\ 1 \le i \le |K|+1$$

$$Q_t^i = True \iff \text{στο βήμα } t \text{ η μηχανή βρίσκεται στην κατάσταση } q_i$$

$$P_t^s,\ 1 \le s \le p(n),\ 1 \le t \le p(n)$$

$$P_t^s = True \iff \text{στο βήμα } t \text{ η κεφαλή της μηχανής βρίσκεται στη θέση } s \text{ της ταινίας}$$

$$S_{s,t}^i,\ 1 \le s \le p(n),\ 1 \le s \le p(n),\ 1 \le i \le |\Sigma|$$

$$S_{s,t}^i = True \iff \text{στο βήμα } t \text{ στη θέση } s \text{ της ταινίας περιέχεται το σύμβολο } \sigma_i.$$

Το πλήθος των προτασιακών μεταβλητών είναι $O(p(n)^2)$.

Προτάσεις της $\Phi_{M,w}$

1. Σε κάθε χρονική στιγμή t, η M βρίσκεται σε ακριβώς μία κατάσταση.

$$A = \bigwedge_{t=0}^{p(n)} \left(\bigvee_{i=0}^{|K|} Q_t^i \ \wedge \bigwedge_{i=0}^{|K|-1} \ \bigwedge_{j=i+1}^{|K|} \neg(Q_t^i \wedge Q_t^j) \right)$$

   Το A περιέχει $O(p(n))$ literals.

2. Σε κάθε χρονική στιγμή t η κεφαλή της M βρίσκεται σε ακριβώς μία θέση της ταινίας.

$$B = \bigwedge_{t=0}^{p(n)} \left(\bigvee_{i=0}^{p(n)} P_t^i \ \wedge \bigwedge_{i=0}^{p(n)-1} \ \bigwedge_{j=i+1}^{p(n)} \neg(P_t^i \wedge P_t^j) \right)$$

   Το B περιέχει $O(p(n)^3)$ literals.

3. Σε κάθε χρονική στιγμή t, σε κάθε θέση της ταινίας περιέχεται ακριβώς ένα σύμβολο (το οποίο μπορεί να είναι το $\sqcup$).

$$C = \bigwedge_{t=0}^{p(n)} \bigwedge_{s=0}^{p(n)} \left(\bigvee_{i=1}^{|\Sigma|} S_{s,t}^{i} \wedge \bigwedge_{i=1}^{|\Sigma|-1} \bigwedge_{j=i+1}^{|\Sigma|} \neg(S_{s,t}^{i} \wedge S_{s,t}^{j}) \right)$$

Το C περιέχει $O(p(n)^2)$ literals.

4. Τη χρονική στιγμή 0, η M βρίσκεται στο αρχικό configuration.

$$D = Q_0^1 \wedge P_0^1 \wedge S_{1,0}^1 \wedge \bigwedge_{i=2}^{n+1} S_{i,0}^{w_i} \wedge \bigwedge_{i=n+2}^{p(n)} S_{i,0}^2$$

Το D περιέχει $O(p(n))$ literals.

5. Το configuration τη χρονική στιγμή $t+1$ προκύπτει από την εφαρμογή της συνάρτησης μετάβασης δ, στο configuration της χρονικής στιγμής t.

$$E = \bigwedge_{t=0}^{p(n)-1} \bigwedge_{s=0}^{p(n)} \bigwedge_{l=1}^{|\Sigma|} \left(Q_t^i \wedge P_t^s \wedge S_{s,t}^l \rightarrow Q_{t+1}^{i'} \wedge P_{t+1}^{s+d} \wedge S_{s,t+1}^{l'} \right)$$

$$\text{όπου } (q_{i'}, \sigma_{l'}, d) \in \delta(q_i, \sigma_l) \text{ και } d \in \{-1, 0, 1\}$$

Το E περιέχει $O(p(n)^2)$ literals.

Το περιεχόμενο της θέσης s δεν μπορεί να αλλάξει κατά τη χρονική στιγμή $t+1$ αν τη χρονική στιγμή t η κεφαλή δεν βρισκόταν στη θέση s.

$$F = \bigwedge_{t=0}^{p(n)} \bigwedge_{s=0}^{p(n)} \bigwedge_{l=1}^{|\Sigma|} (S_{s,t}^l \wedge \neg P_t^s \rightarrow S_{s,t+1}^l)$$

Το F περιέχει $O(p(n)^2)$ literals.

6. Η M αποδέχεται το w.

$$G = Q_{p(n)}^0$$

Τελικά ορίζουμε $\Phi_{M,w} = A \wedge B \wedge C \wedge D \wedge E \wedge F \wedge G$.

Το μήκος της $\Phi_{M,w}$ είναι $O(p(n)^3)$ (καθοριστικό είναι το μήκος του B).